



TITLE:

# 変分原理とシュレーディンガー方程式 (無限次元解析と量子確率論の動向)

AUTHOR(S):

伊東, 由文; 萱間, 顕誠

---

CITATION:

伊東, 由文 ...[et al]. 変分原理とシュレーディンガー方程式 (無限次元解析と量子確率論の動向). 数理解析研究所講究録 2002, 1278: 86-95

ISSUE DATE:

2002-08

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/42334>

RIGHT:

## 変分原理とシュレーディンガー方程式

徳大・総合科 伊東 由文 (Yoshifumi Ito)・萱間 顕誠 (Kenjoh Kayama)  
Faculty of Integrated Arts and Sciences  
Univ. of Tokushima

本論文は伊東・萱間 [1] についての報告の記録である。発表の機会を与えられたオーガナイザーの尾畑伸明教授に感謝申し上げます。

### 1 新量子論の公理

ここでは原子・分子の集団的ふるまいを記述する数学モデルを示したい。

量子論の問題は次の二つである：

1. 微粒子系の量子状態とその時間発展の法則を明らかにすること。
2. 微粒子系の物理量の期待値などの統計量を計算すること。

量子系の特徴は次の三つにまとめられる：

1. 粒子と波動の二重性。
2. 物理量の離散化。
3. 正準交換関係とハイゼンベルグの不確定性関係。

以下に、新量子論の公理を定式化する。それによって量子論のこれらの特徴を説明でき、上記の問題の解を得ることができる。

**公理 I (量子系)** 量子系  $\Omega$  は確率空間  $(\Omega, \mathcal{B}, P)$  であると仮定する。ここで、 $\Omega$  は微粒子系  $\omega$  の集合で、 $\mathcal{B}$  は  $\Omega$  の部分集合からなる  $\sigma$  代数で、 $P$  は  $\mathcal{B}$  上の完全加法的確率測度である。

微粒子系の集合、すなわち量子系は一般に無限集合である。例えば、原子や分子の集合を量子系と考えることができる。

**例 1.1 (1) 1 粒子系 (自由粒子系)** これはその根元事象  $\omega$  がただ 1 個の微粒子から構成される量子系である。たとえば、自由電子の集団がある。

**(2) 2 粒子系** これはその根元事象  $\omega$  が二つの結合された微粒子の系から構成される量子系である。たとえば、水素原子の集団がある。1 個の水素原子は 1 個の原子核と 1 個の電子の結合系である。1 個の水素原子はこの量子系の根元事象である。

**(3)  $n$  粒子系** これはその根元事象  $\omega$  が  $n$  個の結合された微粒子の系から構成される量子系である。たとえば、一般の原子の集団がある。1 個の原子は 1 個の原子核と  $n-1$  個の電子の結合系である。1 個の原子はその量子系の根元事象である。

**公理 II (量子状態)** 量子系  $\Omega = \Omega(\mathcal{B}, P)$  ( $\equiv (\Omega, \mathcal{B}, P)$ ) の量子状態は量子系を構成する微粒子系の位置座標  $\mathbf{r}(\omega)$  と運動量座標  $\mathbf{p}(\omega)$  の量子確率分布状態であると仮定する。ここで、 $n$  次元ユークリッド空間  $\mathbf{R}^n$  とその双対空間  $\mathbf{R}_n$  の直交座標系を考える。さらに、 $d$  は物理空間の次元、 $N$  は一つの根元事象  $\omega$  を構成する粒子の数とし、 $n = dN$  とする。

量子状態は次のように決定されている。

(II<sub>1</sub>) 位置座標  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\omega)$  の量子確率分布は,  $\mathbf{R}^n$  上の一つの規格化された  $L^2$  関数  $\psi$  に対応する直交ラドン確率測度である。これを  $|\psi\rangle$  または  $\psi$  と表す。

(II<sub>2</sub>) 運動量座標  $\mathbf{p} = \mathbf{p}(\omega)$  の量子確率分布は,  $\psi$  のフーリエ変換  $\hat{\psi}$  に対応する直交ラドン確率測度である。これを  $|\hat{\psi}\rangle$  または  $\hat{\psi}$  と表す。ここで, フーリエ変換  $\hat{\psi}$  は

$$\hat{\psi}(\mathbf{p}) = (2\pi\hbar)^{-n/2} \int \psi(\mathbf{r}) e^{-i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r})/\hbar} d\mathbf{r},$$

$$\psi(\mathbf{r}) = (2\pi\hbar)^{-n/2} \int \hat{\psi}(\mathbf{p}) e^{i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r})/\hbar} d\mathbf{p},$$

$$\mathbf{r} = (x_1, x_2, \dots, x_n), \quad \mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_n),$$

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{r} = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_n x_n$$

によって与えられる。ここで,  $\hbar = h/2\pi$  とおいている。  $h$  はプランクの定数である。

(II<sub>3</sub>)  $\mathbf{R}^n$  の部分集合  $A$  に対し,

$$P(\{\omega \in \Omega; \mathbf{r}(\omega) \in A\}) = \mu(A) (\equiv \int_A |\psi(\mathbf{r})|^2 d\mathbf{r}).$$

すなわち, 位置座標  $\mathbf{r}(\omega)$  が領域  $A$  に属する確率は  $\mu(A)$  に等しい。そのとき, 確率空間  $(\mathbf{R}^n, \mathcal{B}_n, \mu)$  が得られる。ここで,  $\mathcal{B}_n$  は  $\mu$  可測事象全体の族である。

(II<sub>4</sub>)  $\mathbf{R}_n$  の部分集合  $B$  に対し,

$$P(\{\omega \in \Omega; \mathbf{p}(\omega) \in B\}) = \hat{\mu}(B) (\equiv \int_B |\hat{\psi}(\mathbf{p})|^2 d\mathbf{p}).$$

すなわち, 運動量座標  $\mathbf{p}(\omega)$  が領域  $B$  に属する確率は  $\hat{\mu}(B)$  に等しい。そのとき, 確率空間  $(\mathbf{R}_n, \hat{\mathcal{B}}_n, \hat{\mu})$  が得られる。ここで,  $\hat{\mathcal{B}}_n$  は  $\hat{\mu}$  可測事象全体の族である。

**公理 III (量子系の運動).** 量子系の状態の時間発展を量子系の運動という。量子系の運動法則はシュレーディンガー方程式によって記述される。シュレーディンガー方程式を量子系の運動方程式という。

シュレーディンガー方程式は方程式

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = H\psi, \quad \psi = \psi(t, \mathbf{r})$$

によって定義される。

作用素  $H$  はハミルトニアンといわれ, それぞれの量子系に対応していろいろな形をとる。  $H$  は  $\psi$  の属するヒルベルト空間  $\mathcal{H}$  上の自己共役作用素であると仮定されている。

公理 III において, シュレーディンガー方程式が時間に関して 1 階の偏微分しか含まないということを用いて, 量子系に対する確率の保存則を定理として証明できる。したがって, シュレーディンガー方程式が時間に関して 1 階の偏微分だけを含むということは意味のあることである。

新量子論とは原子や分子の集団のような量子系の量子状態の時間発展の法則を研究する理論である。量子系の運動の研究をする理論である。基礎方程式はシュレーディンガー方程式である。

**定理 1.1 (量子状態の重ね合わせの原理)**  $\psi, \psi_1, \psi_2$  は一つの量子系のシュレーディンガー方程式

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = H\psi$$

の三つの解であるとする。関係式

$$\psi = \alpha_1 \psi_1 + \alpha_2 \psi_2, \quad (\alpha_1, \alpha_2 \text{ は複素数})$$

が成り立っているとする。このとき、 $A \subset \mathbf{R}^n$  に対し、

$$\begin{aligned} \int_A |\psi|^2 d\mathbf{r} &= |\alpha_1|^2 \int_A |\psi_1|^2 d\mathbf{r} + \alpha_1^* \alpha_2 \int_A \psi_1^* \psi_2 d\mathbf{r} \\ &\quad + \alpha_2^* \alpha_1 \int_A \psi_2^* \psi_1 d\mathbf{r} + |\alpha_2|^2 \int_A |\psi_2|^2 d\mathbf{r} \end{aligned}$$

が成り立つ。

この原理を用いて、粒子と波動の二重性を説明できる。

次に定常状態と境界条件を考える。量子系の運動方程式はシュレーディンガー方程式

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = H\psi$$

によって与えられる。この方程式が時間変数を明示的に含まなければ、この系は保存系に対応する。この場合この方程式の解は

$$\psi = \phi e^{-iEt/\hbar},$$

$$(*) \quad H\phi = E\phi$$

と表される。ここで、 $E$  は実数である。方程式(\*)は時間変数に依存しないシュレーディンガー方程式である。このとき、 $\psi$  はエネルギー期待値  $E$  を持つ定常状態といわれ、 $\phi$  は定常状態の波動関数といわれる。方程式(\*)の固有値問題はその固有値と固有関数を求めることである。特別な条件のもとで、この状態は束縛状態といわれる。この場合、固有値は離散的である。これが物理量の離散性を説明するものである。これはエネルギー期待値が離散的になるということである。

**定義 1.1 (力学変数の期待値)** 力学変数  $M$  と  $N$  はそれぞれ  $\mathbf{r}$  と  $\mathbf{p}$  の関数であると仮定する。 $M$  と  $N$  の期待値  $\langle M \rangle$  と  $\langle N \rangle$  は、それぞれ関係式

$$\langle M \rangle = \int \psi^*(t, \mathbf{r}) M(\mathbf{r}) \psi(t, \mathbf{r}) d\mathbf{r},$$

$$\langle N \rangle = \int \hat{\psi}^*(t, \mathbf{p}) N(\mathbf{p}) \hat{\psi}(t, \mathbf{p}) d\mathbf{p}$$

によって定義される。

**例 1.2** 次が成り立つ：

$$\langle x \rangle = \int \psi^*(t, \mathbf{r}) x \psi(t, \mathbf{r}) d\mathbf{r},$$

$$\langle p_x \rangle = \int \hat{\psi}^*(t, \mathbf{p}) p_x \hat{\psi}(t, \mathbf{p}) d\mathbf{p}$$

$$= \int \psi^*(t, \mathbf{r}) \left( \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} \right) \psi(t, \mathbf{r}) d\mathbf{r},$$

$$\Delta x^2 = \langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle, \quad \Delta p_x^2 = \langle (p_x - \langle p_x \rangle)^2 \rangle.$$

ここで正準交換関係と不確定性関係について考える。位置表示において、力学変数  $x, p_x, \dots$  等々にはそれぞれ作用素  $x, (\hbar/i)(\partial/\partial x), \dots$  等々が対応する。そのとき正準交換関係は

$$[x, p_x] = xp_x - p_x x = i\hbar,$$

等々である。そのとき、次が成り立つ。

**定理 1.2 (ハイゼンベルグの不確定性関係)** 1次元量子系を考える。  $\Delta x$  と  $\Delta p$  はそれぞれ位置変数と運動量変数の標準偏差とする。このとき、ハイゼンベルグの不確定性関係

$$\Delta x \cdot \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$$

が成り立つ。

他の量子系においても、正準交換関係を満たす正準共役な力学変数の対に対してハイゼンベルグの不確定性関係が成り立つ。

原子・分子の運動において位置変数と運動量変数は独立であると考えてよいだろうか。独立ということであれば、位置変数と運動量変数の確率分布関数の積が位置変数と運動量変数の同時分布の確率分布関数を与える。このとき、ハイゼンベルグの不確定性関係は無意味である。ハイゼンベルグの不確定性関係を、思考実験ではなく、実験的に検証できないだろうか。

## 2 変分原理とシュレーディンガー方程式

自然界や数学的世界の表象を概念化し、その概念化されたアイデアを数学的關係、すなわち数式によって表現することによって数学的な解析や計算が可能になる。

自然現象の何が数学的に表現し得るのが問題である。物理学では位置座標と運動量座標及びその関数で表されるものが問題である。このように座標の考え方は幾何学だけではなく物理学においても非常に大切である。

新量子論においては量子系を構成する微粒子の位置変数と運動量変数の量子確率分布を表す波動関数を決定することが問題である。

新量子論において波動関数によって表される量子状態、すなわち量子確率分布と古典統計学においてガウス分布の表す確率変数の分布とは概念的に対応するものである。どういふ変数の分布を考えているかということとその分布法則の型の違いがあるだけである。

微粒子の集団において粒子がランダムに運動しているから、波動関数とそのフーリエ変換によって表される位置と運動量の量子確率分布が変動するのであって、その逆ではない。

粒子の位置や運動量はランダムに変動しているのにエネルギーなどの物理量がどうして確定値をとると考えられるのだろうか。実際は定常状態の近くで微少なゆらぎをしているのであろう。一つの定常状態から他の定常状態へ跳び移るとき、光を放出したり吸収したりしているのであろう。エネルギーの期待値等は確定値となるのである。

ここで、一つの原理として

**原理 I** 量子系の定常状態は、その量子系のエネルギー期待値がある条件のもとに停留値をとるような状態として実現される。

を考えたい。後に、この原理に基づいてシュレーディンガー方程式が導かれることを示す。一般に、一つの量子系で、エネルギー期待値を停留値とする定常状態は沢山ある。一つの量子系の量子状態はそのような定常状態の重ね合わせとして実現される。

定常状態を実現するいくつかの量子状態の記述する部分集団の各粒子はその集団のエネルギー期待値に近いエネルギー状態で振動運動している。これが光を吸収したり発散したりすることによって一つの定常状態から他の定常状態に移項する。このとき、一定の定常状態間の移項のみが許される。このとき吸収したり発散したりする光がスペクトルとして観測される。これに関しては古典量子論のときから解明されているように、理論と観測値はよく一致している。

これを水素原子の作る量子系の場合に考えてみると次のようになる。水素原子のエネルギー準位の変動は平均のエネルギーの水素原子の集団の間の粒子の変動と考えられる。 $E_1$ の平均エネルギーの集団の粒子が $E_2$ の平均エネルギーの集団に移ったり又はその逆の移動をすることであると考えられる。その平均エネルギーの差は光子の放出、吸収と考えられる。

旧量子論でいわれていたように、電子は各エネルギー準位に対応した軌道を描くのではなく、それぞれの平均エネルギーの状態の運動をするだけである。軌道が沢山あるのではなく、運動の平均エネルギー状態が沢山あるのである。エネルギーの分布状態は波動関数で決まっている。電子の位置や運動量は波動関数に従って変動し、電子はその位置分布や運動量の分布状態を変える。平均エネルギー状態の変動がスペクトル線の放出や吸収の原因である。

以下に、原理 I に基づいてシュレーディンガー方程式を導く。原理 I によってシュレーディンガー方程式を導くとき、旧量子論におけるような量子化のマジックは必要としない。全く数学的で、合理的な議論によってシュレーディンガー方程式が導かれる。量子化のマジックは完全に消滅する。

量子系の運動状態について考える枠組は 1 節に与えられている。公理 I(量子系)、公理 II(量子状態)、公理 III(量子系の運動) を各量子系について具体的に規定することによって研究が始まる。

量子系の運動を規定するシュレーディンガー方程式を上述べた公理系において導くことを考えよう。新量子論の公理系のうち、公理 I と公理 II に本節の原理 I を加えて、それからシュレーディンガー方程式を導く。ここでは公理 III は用いない。最初は一般的枠組で考える。

ここで、1 節の記号を用いる。 $\Omega = \Omega(\mathbf{B}, P)$  は一つの量子系を表す確率空間とする。 $\Omega$  の根元事象  $\omega$  は微粒子の結合系の一つを表す。これを微粒子系ということにする。このとき、微粒子系の位置変数を  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\omega) = (x_1(\omega), \dots, x_n(\omega))$ 、運動量変数を  $\mathbf{p} = \mathbf{p}(\omega) = (p_1(\omega), \dots, p_n(\omega))$  と表す。ここで、空間次元を  $d$ 、微粒子系  $\omega$  を構成する微粒子の個数を  $N$  とするとき、 $n = dN$  とおいている。変数  $\mathbf{r}$  は空間  $\mathbf{R}^n$  において変動し、変数  $\mathbf{p}$  は空間  $\mathbf{R}_n$  において変動すると考える。このとき、公理 II によって、波動関数  $\psi(\mathbf{r})$  は位置変数  $\mathbf{r}$  の量子確率分布法則を表し、そのフーリエ変換  $\hat{\psi}(\mathbf{p})$  は運動量変数  $\mathbf{p}$  の量子確率分布法則

各微粒子系  $\omega$  のエネルギーは古典力学によって定まっているもので、その値は

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{2m_i} p_i(\omega)^2 + V(\mathbf{r}(\omega))$$

によって与えられる。ここで、第1項は微粒子系  $\omega$  の運動エネルギーを表し、第2項はポテンシャルエネルギーを表している。ここで、 $m_i$  は微粒子の質量を表す。一つの微粒子に対応する  $m_i$  の値は同じと考える。このエネルギー変数は量子系を表す確率空間  $\Omega$  上で定義されている。

このエネルギー変数の期待値、すなわちエネルギー期待値の計算は公理 II を用いて次のように行われる。すなわち、 $A$  を  $\mathbf{R}^n$  の領域、 $B$  を  $\mathbf{R}_n$  の領域とすると、関係式

$$P(\{\omega \in \Omega; \mathbf{r}(\omega) \in A\}) = \int_A |\psi(\mathbf{r})|^2 d\mathbf{r},$$

$$P(\{\omega \in \Omega; \mathbf{p}(\omega) \in B\}) = \int_B |\hat{\psi}(\mathbf{p})|^2 d\mathbf{p}$$

が成り立つことを用いて、次のように計算が行われる。

$$\begin{aligned} & E\left[\sum_{i=1}^n \frac{1}{2m_i} p_i(\omega)^2 + V(\mathbf{r}(\omega))\right] \\ &= E\left[\sum_{i=1}^n \frac{1}{2m_i} p_i(\omega)^2\right] + E[V(\mathbf{r}(\omega))] \\ &= \int \left(\sum \frac{1}{2m_i} p_i^2\right) |\hat{\psi}(\mathbf{p})|^2 d\mathbf{p} + \int V(\mathbf{r}) |\psi(\mathbf{r})|^2 d\mathbf{r} \\ &= \int \left(\sum \frac{\hbar^2}{2m_i} |\psi_{x_i}|^2 + V(\mathbf{r}) |\psi|^2\right) d\mathbf{r} \end{aligned}$$

ここで、フーリエ変換に対するプランシェレルの等式が用いられている。 $\psi_{x_i}$  は  $\psi$  の変数  $x_i$  に関する偏導関数を表す。ここで、このエネルギー期待値を

$$J[\psi] = \int \left(\sum \frac{\hbar^2}{2m_i} |\psi_{x_i}|^2 + V(\mathbf{r}) |\psi|^2\right) d\mathbf{r}$$

とおく。この  $J[\psi]$  をエネルギー汎関数ということがある。このとき、次の変分問題を考える。

**問題** 関数  $v_0, v_1, \dots, v_{n-1}$  が与えられているとき、条件

$$(i) \int |\psi|^2 d\mathbf{r} = 1.$$

$$(ii) \int \psi^* v_\nu d\mathbf{r} = 0 \quad (\nu = 0, 1, \dots, n-1)$$

を満たし、エネルギー汎関数  $J[\psi]$  を停留値とするように関数  $\psi$  を決定せよ。ここで、 $\psi^*$  は  $\psi$  の複素共役を表す。

この問題については, Courant-Hilbert[1], 第6章, 5節, 445頁において考察されている. 我々の考察においては, エネルギー汎関数  $J[\psi]$  を導くとき量子化のマジックを用いないところに特徴がある.

この変分問題を解いてオイラー方程式として次のシュレーディンガー方程式

$$\sum \frac{\hbar^2}{2m_i} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_i^2} + (E - V)\psi = 0.$$

が導かれる.

すなわち, 問題の解である関数  $\psi$  は上のシュレーディンガー方程式の解として求められる.

変数分離の方法を逆にたどることによって, これを時間依存のシュレーディンガー方程式に書き換えると

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \left\{ - \sum \frac{\hbar^2}{2m_i} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + V \right\} \psi$$

を得る.

これによって, 1節の公理 III のシュレーディンガー方程式はこのように本節の原理 I から導かれることがわかった. したがって, 公理 III を原理 I で置き換えることも可能ではあるが, 逆に公理 III はそのままにしておいてもよいということでもある.

量子系を構成する微粒子系は実際には物理的環境の中で環境物質との重力相互作用や電磁相互作用にさらされている. そのような条件下で各微粒子系のエネルギー変数の分布状態が量子状態である波動関数を決定している. 環境物質との重力相互作用は無視されることが多い. 粗い近似では環境物質との電磁相互作用も無視される.

### 3 新量子論についての哲学的考察

旧量子論において多世界解釈でいうように, 微粒子がその生成以来の運動のデータをすべて記憶していると考えることには無理があるように思う. その記憶がどのように運動状態に反映されているかを表現する方法が難しい. 微粒子がある時刻にある点である速度である力の作用の下にあることが分かれば, それ以降の状態はその点におけるデータを初期条件としてそれ以後の運動状態がきまると考える方が自然である. 微粒子にその経歴を記憶するメカニズムがあるとは思われない.

シュレーディンガー方程式は時間の平行移動に関して不変である. このことは時間の原点を自由に定め得ることを意味する. 今日の正午からの時間発展の法則と明日の正午からの時間発展の法則は同じ形であるということである. だから, 初期データを同じになるように調整しておけば, 同じ長さの時間の後の分布法則の形は同じであるということである. このことは同じ条件で同じ現象が繰り返すということである. だから, 実験の条件を同じにして実験をくり返して得られた結果は同じ結果を与えるということである. これが自然法則の普遍的法則であるゆえんのものである.

量子系というのは抽象的な存在ではない. 現実の電子や原子や分子の集団の事である. 現実に存在しない量子系を考える理由は何もない.

物質はいわゆる量子化によって粒子となり離散的な物理量が出現するのではない. ミクロの物質は初めから粒子として存在しており, 波動として振動しているのである. 粒子が



波動として振動するということは粒子の軌跡が直線ではなく一般に不規則な曲線になるということである。その結果として量子系の物理量は量子確率分布法則に従って分布するのである。ある条件の下では物理量の期待値は離散的になるのである。

ミクロの物質は粒子として存在している。それがコントロールの仕方によって波動として振動したり、ビームのように直線的に運動したりするのである。これが旧量子力学で説明する粒子と波動の二重性の実態である。

ミクロの物質の存在形態は粒子であり、それらの粒子の集団としての運動状態が波動としての振動である。しかし、微粒子は自然状態では常に振動しているから、その粒子像を見ることは難しい。微粒子の振動に同期したシャッターを持つ観測装置があれば自然状態で微粒子を観測できるであろう。そうでないときには、観測が行われる時間間隔の間にも微粒子は運動しているから、その運動の映像を残像として記録してしまい、映像は広がりを持ってしまうであろう。外村等の実験のように写真乾板に焼き付けられた粒子像は微粒子が写真乾板に当たって静止したときの静止状態における微粒子の映像である。自然状態で粒子を確認することの困難はこのような事情によるものである。

二重スリットの実験で、1個の粒子が同時に二つの穴を通ったということを確認する方法はない。その粒子はどちらか一つの穴を通ってもよいのである。穴を一つふさいだコントロールでは干渉縞ができなくて、穴が二つあるというコントロールでは干渉縞ができるというだけである。1個の粒子が二つの穴を同時に通るといえるのは想像にすぎない。波動関数が粒子像を表すと解釈した誤解であったかもしれない。

2節で見たように、量子系の運動の基礎方程式であるシュレーディンガー方程式は量子系の構成単位である微粒子系の一つの系内での相互作用によるエネルギーの分布状態によって決定される。微粒子系の間の相互作用や微粒子系の置かれている物理的環境との相互作用は考慮しないようなモデルで考えている。したがって、結晶格子による干渉縞は微粒子系を多数一度に投射しても、一個一個繰り返し投射してもその分布状態は同様であると考えられる。量子状態である波動関数の干渉が問題であるが、上述のように波動関数は一個一個の微粒子系のエネルギーの状態によって決まっているからである。

波動関数は位置変数の量子確率分布法則という法則を表現するものであって、粒子のような物理的実在そのものをどんな意味でも表現するものではない。

量子確率分布に絶対値1の複素数を掛けても微粒子の存在確率は変わらない。しかし、他の量子系との相互作用を考えると、二つの量子系の結合状態の量子確率分布が二つの量子系の量子確率分布の線形型結合で表される場合、それぞれの量子系の量子確率分布の位相因子が本質的に効いてきて無視し得ない。したがって、一つの量子系の量子確率分布は位相因子まで含めて確定されなければならない。実験的には既知の量子系との干渉実験によって、未知の量子系の位相因子を決定すればよいだろう。

電子も粒子であるから、コントロールの仕方によっては電子1個の運動というのも見ることが出来るのである。電子は自己場との相互作用もあるのであるから、単なる直線運動だけであるかどうかは分からない。しかし、量子系の状態の時間発展を問題にする量子論で説明出来ることではない。重力相互作用や電磁相互作用によって引き起こされる一つの電子の運動ということである。量子論の対象は量子系という微粒子の集団の集団としてのふるまいである。

電子1個1個の運動を考えると自己場等の解明不可能な要因が加わって、その運動状態の法則性は理解しがたい。しかし、そういう電子の集団の集団としての運動には一定の法則性が見出される。それが量子確率分布法則であるというのである。

旧量子論において量子現象の物理的意味はコペンハーゲン解釈によって意味付けられる。解釈とは何を意味するのであろうか。これは原理なのであろうか、法則なのであろうか。物理現象は本来原理や法則に基づいて説明されたとき初めて正しく理解されたと考えられるものであろう。原理でもなく法則でもない解釈によって物理現象が分かったということは何を意味するのであろうか。何が分かったことになるのだろうか。

粒子の位置変数  $r$  の分布を考えると、 $r$  は変数 (量子確率変数) と考えられている。いろいろな値をとり得る変数である。1個の粒子の位置座標というのは一つの値であって変数とは考えられない。1粒子の位置座標について確率的に考えることができないのはこの為である。ここに、旧量子論におけるコペンハーゲン解釈の誤りがあったのである。確率の意味を正しく理解していなかったのである。

新量子論において、微粒子系の集団である量子系は確率空間になっていると考える。これは微粒子系の一つ一つはランダムな運動をしているが、集団としては量子確率法則にしたがって運動していると考えることである。しかし、その確率空間が具体的に如何なるものであるかを決定することは難しい。その上の量子確率変数と考えられた位置変数と運動量変数の量子確率分布の形によって量子系は特徴付けられると考えている。古典確率論で、確率空間の具体的な形よりもその上の確率変数の分布の形がしばしば問題であるのと同様である。

量子状態は量子系を構成する微粒子系の内部相互作用エネルギーによって決まる。そのとき、一つの微粒子系を構成する各々の微粒子の配置関係は一定ではなく変動し続けている。それによって微粒子系は微少なゆらぎ運動をしているはずである。こういう運動状態が位置、運動量やエネルギーなどの変数がランダムに変動する原因であると考えられる。

量子系の運動を考えると、時間変数は量子系である確率空間上の確率変数にはなっていない。したがって、時間とエネルギーに対する不確定性関係は存在しない。

量子現象については実験的には奇妙な現象は発見されていないという。このことは実験家は正しく統計処理を行っていることによるのである。量子確率を理論通りに正しく使っているのである。実験観測はノイマンの観測の理論によって行っているのではないということである。旧量子論の解釈が確率的に無意味だったために、奇妙な自然像を作りあげてしまったのである。

量子系の量子状態についての実際の観測は、いわゆる観測の問題とは無関係に行われていることを想起する必要がある。

ある確率分布法則に従う統計的母集団からある標本をとったとしても母集団の分布法則が変わるとは誰も考えない。これと同様にある量子系の複数個の粒子の状態を実験によって決定したとしても、これは一つの標本を採ることになるのであって、量子系の量子確率分布法則が変わるとは考えない。すなわち波束の収縮というのは無意味である。

量子系の観測とは量子系を構成する母集団からのサンプリングのことである。

量子論が出来たからといって、一つ一つの微粒子がニュートン力学やマックスウェルの電磁気学に従って運動することには何の変わりもないのである。これは自然界に存在する

相互作用で核力に関係しないものはこの2種類しかないからである。

量子論にはニュートン力学や電磁気学のように固有の力の相互作用が存在しない。したがって、量子系の運動を記述する分野は力学というよりも理論であると考えられる。それで、この理論を量子論という。旧の理論と区別するとき、これを新量子論という。これまで量子力学という言葉が使われているのは過渡的な状況によるものであると考えられる。

古典量子論で、原子内電子の運動をクーロン力によって説明しようとして失敗した。そのために、原子の安定性の説明には古典力学は役に立たないといわれ、量子論が古典力学にとって変わるものと考えられた。しかし、力の相互作用を考える限り、古典力学を用いて説明するしかない。したがって、原子の安定性がどのような相互作用で実現されるのか、実はまだ何も分かっていない。量子論では電気力の相互作用の影響かあるいは電磁相互作用の影響しか考えていない。質量の影響は運動量やエネルギーとしては計算に寄与するが、重力相互作用は無視されている。それ以外の量子論固有の相互作用は存在していないのかまだ見つかっていないのか。原子の安定性の真の原因はまだ研究の余地がありそうである。しかし、原子は決して孤立して存在しているわけではなく、外の世界と相互作用している。この辺に原子の安定性を解く鍵があるかもしれない。

## 文 献

伊東由文

- [1] New Axiom of Quantum Mechanics — Hilbert's 6th Problem —, J. Math. Tokushima Univ., 32(1998), 43-51.
- [2] 量子力学の数学的原理. 新理論, サイエンスハウス, 2000.
- [3] Theory of Quantum Probability, J. Math. Tokushima Univ., 34(2000), 23-50.
- [4] (知足庵) 不思議の泉 (自然 I, II), ホームページに公開中, 2001.

伊東由文・萱間顕誠

- [1] 変分原理とシュレーディンガー方程式 (印刷中), 2001.

R. Courant and D. Hilbert

- [1] Methods of Mathematical Physics, Vol.I, Interscience, 1953.